

## Esercizi su curve e superfici

1. Considerare la curva espressa come grafico della funzione  $y = x^{3/2}, x \in [0, a]$ . Determinare la retta tangente nel punto  $(1, 1)$ , e determinare la lunghezza della curva.

2. Trovare la lunghezza della curva  $y = e^x, x \in [0, 1]$ .

3. Considerare la curva (cardioide) espressa in coordinate polari dalla relazione

$$r = a(1 + \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Determinarne la retta tangente nel punto corrispondente a  $t = \pi/2$  e determinarne la lunghezza.

4. Determinare la lunghezza della curva (cicloide)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin(t)) \\ y = a(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

5. Determinare la retta tangente nel punto  $(0, 1)$  alla curva espressa come luogo delle soluzioni dell'equazione:

$$xe^x = y - 1 + \sin(xy)$$

6. Se valgono le ipotesi del Teorema del Dini per la funzione  $f(x)$  definita implicitamente nella forma  $F(x, y) = 0$  con  $F \in C^2$ , scrivere l'espressione della derivata prima e seconda  $f'(x), f''(x)$ .

7. Mostrare che il luogo dei punti del piano che soddisfano l'equazione

$$x \log y - y \cos x = 0$$

definisce una curva regolare esprimibile come grafico cartesiano nell'intorno del punto  $(\pi/2, 1)$  e determinarne lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine.

8. Dire nell'intorno di quali punti risulta localmente invertibile la trasformazione

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

9. Trovare il massimo e il minimo della funzione

$$z = x + y$$

ristretta alla curva

$$x^2 + (y - 1)^2 = 4$$

10. Trovare il piano tangente nel punto  $(1, 0, 0)$  alle tre superfici:

1)  $z = x^2 - y^2 - 1$

$$2) x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$$

$$3) \begin{cases} x = \cos(u + v) \\ y = \sin(u - v) \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

# Esercizi su Calcolo differenziale in più variabili

1. Supponiamo che

$$f(x, y, z) = (yz, zx, xy)$$

per  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e che

$$\gamma_1(t) = (1 + 2t, 3 - t, -1 + 4t)$$

per  $t \in [0, 1]$  e

$$\gamma_2(t) = \left( e^t, -\frac{e^{2t}}{8} + \frac{25}{8}, e^{2t} - 2e^t \right)$$

per  $0 \leq t \leq \log 3$ . Si osservi che  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  partono dal punto  $(1, 3, -1)$  e arrivano al punto  $(3, 2, 3)$ . Determinare  $\int_{\gamma_1} f(x)$  e  $\int_{\gamma_2} f(x)$  e giustificare il risultato trovato.

[entrambi gli integrali sono pari a 21; il campo di forze è conservativo e un suo potenziale è  $xyz$ ]

2. Supponiamo che

$$f(x, y, z) = (xy, yz, zx)$$

per  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e che

$$\gamma_1(t) = (1 + 2t, 3 - t, -1 + 4t)$$

per  $t \in [0, 1]$  e

$$\gamma_2(t) = \left( e^t, -\frac{e^{2t}}{8} + \frac{25}{8}, e^{2t} - 2e^t \right)$$

per  $0 \leq t \leq \log 3$ .  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  partono dal punto  $(1, 3, -1)$  e arrivano  $(3, 2, 3)$ . Determinare  $\int_{\gamma_1} f(x)$  e  $\int_{\gamma_2} f(x)$  e giustificare perchè vengono valori diversi.

[il primo viene  $\frac{109}{6}$  e il secondo  $\frac{403}{20}$ ]

3. Supponiamo che

$$f(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Dire se il campo è conservativo e calcolarne, in tal caso, tutte le primitive nell'insieme  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

4. Siano, per  $t \in [0, 1]$ ,

$$\gamma_1(t) = (t \cos \pi t, t \sin \pi t, t)$$

e

$$\gamma_2(t) = (t^2 \cos \pi t \sin \pi t, t^2 \sin \pi t, t^2 \cos \pi t)$$

e consideriamo il campo vettoriale

$$f(x, y, z) = (xy, yz, zx)$$

Si calcolino

$$\int_{\gamma_1} f(x,y,z), \int_{\gamma_2} f(x,y,z)$$

e si dica se era prevedibile che i due risultati dovevano coincidere.

5. Se  $f$  è una funzione di classe  $C^1$  di  $x, y$  e  $z$  e se  $x, y$  e  $z$  sono funzioni regolari di  $t$ , scrivere la derivata della funzione composta:

$$\phi(t) = f(x(t), y(t), z(t)).$$

6. Trovare i punti di massimo e di minimo per la funzione

$$f(x,y) = 5x^2 - 4xy + y^2$$

nel disco chiuso

$$S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

(Il massimo risulta:  $3 + 2\sqrt{2}$ )

7. Per la funzione

$$f(x,y) = \frac{xy}{x+y}$$

per  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$  e  $x+y \neq 0$ , si verifichino le seguenti identità:

a.  $x D_x f(x,y) + y D_y f(x,y) = f(x,y)$ .

b.  $x^2 D_{xx} f(x,y) + 2xy D_{xy} f(x,y) + y^2 D_{yy} f(x,y) = f(x,y)$ .

8. Dire se il campo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  :

$$f(x,y,z) = (yz \cos xz, \sin xz, xy \cos xz)$$

è conservativo e in tal caso determinarne una funzione potenziale.

(una funzione potenziale è  $F(x,y,z) = y \sin xz$ ).

9. Definiamo

$$G(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

per ogni punto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  di  $\mathbb{R}^n$ . Verificare che

$$\text{grad } G(x) = \frac{1}{G(x)} x$$

per ogni  $x \neq 0$

(quindi se

$$f(x) = \frac{1}{G(x)} x$$

allora  $G$  è un potenziale del campo  $f$  nell'insieme  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ).

10. Sia  $f$  il campo vettoriale

$$\left( \frac{2xz}{x^2 + y^2}, \frac{2yz}{x^2 + y^2} + \sin yz + yz \cos yz, \log(x^2 + y^2) + y^2 \cos yz + 2z \right)$$

in ogni punto  $(x, y, z)$  di  $\mathbb{R}^3$  tale che  $x^2 + y^2 \neq 0$  e sia  $\gamma$  un qualsiasi cammino regolare che collega il punto  $(1, 0, 1)$  al punto  $(3, \frac{\pi}{6}, 2)$  nell'insieme ove  $x^2 + y^2 > 0$ . Determinare l'integrale

$$\int_{\gamma} f(x).$$

## Esercizi su successioni e serie di funzioni

1. Studiare il limite puntuale e uniforme per le successioni di funzioni

$$f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}; f_n(x) = nx^2 e^{-nx}; f_n(x) = \frac{nx^2}{n^2 + x}; f_n(x) = (x^2 + x)^n.$$

2. Studiare la convergenza puntuale e mostrare che non converge totalmente in tutto  $R$  la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}$$

3. Determinare il raggio di convergenza per le serie di potenze:

$$\sum n^2 x^n; \sum na^n x^n; \sum \frac{a^n}{n!} x^n; \sum \frac{n}{n^3+1} x^n; \sum na^n x^n; \sum \frac{(n+1)!(n+3)!}{(2n)!} x^n$$

4. Trovare le serie di potenze aventi le seguenti somme:

$$S(x) = e^{-x^2}; S(x) = \sqrt{1+x^2}; S(x) = \sin(2x^2)$$

5. Determinare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione di periodo  $2\pi$  che vale  $-1$  per  $x \in (-\pi, 0)$ , vale  $+1$  per  $x \in (0, \pi)$  e vale  $0$  per  $x = -\pi, 0, \pi$ .

6. Scrivere le serie di Fourier relative all'intervallo  $[0, 2\pi]$  delle funzioni  $f(x) = |\sin(x)|$ ;  $f(x) = \sin^3(x)$ ;  $f(x) = \sin^2(2x)$ .

## Esercizi su Massimi e Minimi

1. Al variare del parametro reale  $k$  si cerchino i punti di massimo e minimo relativi della funzione

$$z = x^2 + 2kxy + y^2$$

2. Dati  $n$  punti nel piano  $(x_i, y_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$ , si vuole determinare una retta  $y = mx + q$  in modo che approssimi il piú possibile i punti dati. Matematicamente si vuole risolvere il problema di rendere minima la seguente funzione:

$$E = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2$$

che rappresenta la somma dei quadrati degli scarti fra le ordinate  $y_i$  e le ordinate che dovrebbero avere i punti di ascissa  $x_i$  se appartenessero alla retta che stiamo determinando. Mostrare che esiste una e una sola retta  $y = mx + q$  che rende minima la funzione  $E$  e i numeri  $m, q$  sono le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} m \sum_{i=1}^n x_i + qn = \sum_{i=1}^n y_i \\ m \sum_{i=1}^n x_i^2 + q \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

3. Determinare i massimi e i minimi relativi delle funzioni

$$\log(2 + x^2 + y^2) - xy; \quad 3xy - x^3 - y^3; \quad x^4 + y^4 - x^2y^2.$$

4. Trovare  $x, y, z > 0$  tali che  $x + y + z = 8$  e  $xy^2z$  sia massimo.

5. Determinare il massimo e il minimo della funzione  $xy$  nel cerchio  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

## Esercizi su equazioni differenziali

1. Determinare la soluzione generale delle equazioni differenziali

$$y' = x(1 + \frac{1}{y}); \quad y' + 2xy = 2xe^{-x^2}; \quad y' = \sin(x)(y + \cos(x)); \quad y' = \frac{2}{x}y + x^2$$

2. Mostrare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

non soddisfa la proprietà di avere una e una sola soluzione locale.

3. Dimostrare che i seguenti problemi di Cauchy ammettono soluzione locale o globale, senza cercare di determinarne le soluzioni:

$$\begin{cases} y' = \sin(y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y' = \frac{e^y}{y^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

4. Determinare le soluzioni generali delle equazioni differenziali

$$y'' + 3y' - 10y = 0; \quad y'' + y' + y = 0;$$

5. Determinare le soluzioni generali delle equazioni differenziali

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}; \quad y'' + y' - 6y = e^{4t};$$

6. Verificare che le funzioni 1 e  $\sqrt{x}$  sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + (y')^2 = 0$$

e spiegare perchè una loro generica combinazione lineare  $C_1 + C_2\sqrt{x}$  non è detto che sia soluzione della stessa equazione.

7. Determinare la generica soluzione generale per le equazioni differenziali:

$$y'' + y' - 2y = 1; \quad y''' - y' = \cos^2 x; \quad y'' + y - 1 = x \sin x.$$