

Notazione: dato un campo, una funzione vettoriale o un vettore f si indicherà con f_1, f_2, \dots, f_n rispettivamente la prima, la seconda e l' n -esima componente. Data la funzione g si indicherà con g_x la derivata parziale di g rispetto alla variabile x . La notazione ∇f è equivalente a $\text{grad} f$.

1 Calcolo differenziale in più variabili

Esercizio 1

Immediatamente si può osservare che le componenti del campo verificano la condizione necessaria di Schwartz:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(yz)}{\partial y} &= \frac{\partial(zx)}{\partial x} = z \\ \frac{\partial(yz)}{\partial z} &= \frac{\partial(xy)}{\partial x} = y \\ \frac{\partial(zx)}{\partial z} &= \frac{\partial(xy)}{\partial y} = x\end{aligned}$$

affinchè il campo sia conservativo deve esistere una funzione \mathcal{U} tale che:

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{U}) = yz \Rightarrow \mathcal{U} = xyz + c(y, z)$$

e si osserva che per $c(y, z) = 0$ si ha che:

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{U}) \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{U}) \quad f_3 = \frac{\partial}{\partial z}(\mathcal{U})$$

e quindi una funzione potenziale è:

$$\mathcal{U}(x, y, z) = xyz$$

per cui:

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}(3, 2, 3) - \mathcal{U}(1, 3, -1) = 21$$

Esercizio 2

Si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \neq 0 = \frac{\partial}{\partial x}(yz)$$

e quindi il campo non è conservativo.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma_1) &= \int_0^1 f \cdot \gamma' dt = \int_0^1 (xy, yz, zx)(2, -1, 4) dt \\ &= \int_0^1 ((1+2t)(3-t), (3-t)(4t-1), (1+2t)(4t-1))(2, -1, 4) dt \\ &= \int_0^1 (32t^2 + 5t + 5) dt = \frac{109}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\gamma_2) &= \int_0^{\log 3} f \cdot \gamma' dt \\ &= \int_0^{\log 3} \left(\frac{e^{6t}}{32} + \frac{31}{16}e^{5t} - \frac{221}{32}e^{4t} + \frac{89}{16}e^{3t} + \frac{25e^{2t}}{8} \right) dt = \frac{403}{20}\end{aligned}$$

Esercizio 3

$$(f_1)_y = (f_2)_x = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

e affinché sia conservativo

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{U}) \Rightarrow \mathcal{U} = \int f_1 = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c(y)$$

e preso $c(y) \equiv 0 \forall y \in \mathbb{R}$ si verifica subito che:

$$f_2 = \frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{U})$$

e quindi il potenziali del campo sono tutti e soli quelli della forma:

$$\mathcal{U}(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + c$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5

Sia $\xi(t)$ una funzione vettoriale tale per cui:

$$\xi(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

si ha che:

$$D\xi(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

quindi (applicando la regola della derivata composta si ha):

$$\begin{aligned}D\phi(t) &= Df(x(t), y(t), z(t)) \\ &= D[f(\xi(t))] \\ &= Df(\xi(t)) \cdot D\xi(t) \\ &= \nabla f(\xi(t)) \cdot D\xi(t) \\ &= \begin{bmatrix} f_x(\xi(t)) & f_y(\xi(t)) & f_z(\xi(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} \\ &= f_x(\xi(t))x'(t) + f_y(\xi(t))y'(t) + f_z(\xi(t))z'(t)\end{aligned}$$

Esercizio 6

Innanzitutto si studiano i massimi nella parte interna del disco, quindi si ha:

$$\nabla f = (10x - 4y, 2y - 4x) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

e

$$Hf(0, 0) = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow f(0, 0) = 0 = \text{punto di minimo}$$

Quindi i punti di massimo appartengono alla frontiera ed eventualmente anche altri punti di minimo, la frontiera si può parametrizzare con il seguente cambiamento di base:

$$\begin{cases} x = \cos \vartheta \\ y = \sin \vartheta \end{cases}$$

ottenendo la funzione:

$$g(\vartheta) = 1 + 4 \cos \vartheta (\cos \vartheta - \sin \vartheta)$$

e il problema si riconduce allo studio di massimi e minimi della funzione $g(\vartheta)$ nella sola variabile ϑ , quindi si ha che:

$$g'(\vartheta) = 0 \Leftrightarrow \tan^2 \vartheta - 2 \tan \vartheta - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \vartheta = 1 \pm \sqrt{2}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta &= \frac{1}{\tan^2 \vartheta + 1} = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{4} \\ \sin^2 \vartheta &= 1 - \cos^2 \vartheta = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} \\ \sin \vartheta \cos \vartheta &= \tan \vartheta \cos^2 \vartheta = \pm \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

da cui si ha che:

$$\tan \vartheta = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow g(\vartheta) = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

che sono rispettivamente il massimo ed il minimo della funzione ristretta al disco dato.

Esercizio 7

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{y^2}{(x+y)^2} \\f_y &= \frac{x^2}{(x+y)^2} \\f_{xx} &= \frac{-2y^2}{(x+y)^3} \\f_{yy} &= \frac{-2x^2}{(x+y)^3} \\f_{xy} &= \frac{2xy}{(x+y)^3}\end{aligned}$$

da cui si deriva immediatamente che:

$$xf_x + yf_y = \frac{xy}{x+y} = f(x, y)$$

e

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$$

Esercizio 8

Le derivate miste sono uguali e il dominio è semplicemente connesso quindi il campo è conservativo.

Allora esiste un potenziale \mathcal{U} tale che:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathcal{U}) = f_2 = \sin(xz) \Rightarrow \mathcal{U} = y \sin(xz) + g(x, z)$$

e ponendo $g(x, z) \equiv 0$ si verifica immediatamente che anche la prima e la terza componente del campo sono le derivate parziali, rispettivamente in x e y , della funzione potenziale:

$$\mathcal{U}(x, y) = y \sin(xz)$$

Esercizio 9

$$\begin{aligned}\nabla G_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}(G(\mathbf{x})) \\&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{i-1} x_j^2 + x_i^2 + \sum_{j=i+1}^n x_j^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} \cdot (2x_i) \\&= \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}} = \frac{x_i}{G(\mathbf{x})}\end{aligned}$$

Dove nel secondo passaggio si è utilizzato il fatto che $\sum_{j=1}^{i-1} x_j^2$ e $\sum_{j=i+1}^n x_j^2$ sono costanti rispetto alla x_i e quindi la derivata del radicando è solo $2x_i$. Quindi, estendendo il discorso a tutte le componenti del vettore G , si ha immediatamente che:

$$\nabla G = \frac{1}{G(\mathbf{x})} \mathbf{x}$$

Esercizio 10

Il campo può essere visto come la sovrapposizione di 3 campi di cui è più semplice il calcolo del potenziale:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2xz}{x^2 + y^2}, \frac{2yz}{x^2 + y^2}, \log(x^2 + y^2) \right) &= \nabla z \log(x^2 + y^2) \\ (0, \sin(yz) + yz \cos(yz), y^2 \cos(yz)) &= \nabla y \sin(yz) \\ (0, 0, 2z) &= \nabla z^2 \end{aligned}$$

e quindi si ha il potenziale:

$$\mathcal{U} = z \log(x^2 + y^2) + y \sin(yz) + z^2$$

e il lavoro è dato dalla formula:

$$\mathcal{L} = [\mathcal{U}]_{(1,0,1)}^{(3,\pi/6,2)} = \mathcal{U}(3, \pi/6, 2) - \mathcal{U}(1, 0, 1)$$

2 Massimi e Minimi

Esercizio 1

Innanzitutto la funzione è differenziabile in tutto il suo dominio e quindi i punti di massimo e minimo sono punti critici, quindi:

$$\begin{aligned}\nabla f &= (2x + 2ky, 2y + 2kx) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + ky = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

e si ottiene un sistema lineare omogeneo che ammette solo la soluzione banale se il rango della matrice completa è uguale a 2 (Teorema di Rouché-Capelli) quindi se e solo se:

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 1 - k^2 \neq 0 \Leftrightarrow k \neq \pm 1$$

a) $k = 1$ allora la funzione diventa $f(x, y) = (x + y)^2$ che è sempre positiva e si annulla lungo la retta $y = -x$ che è una retta di punti di minimo assoluto

b) $k = -1$ allora la funzione diventa $f(x, y) = (x - y)^2$ che è sempre positiva e si annulla lungo la retta $y = x$ che è una retta di punti di minimo assoluti.

c) $k \neq \pm 1$ allora la funzione presenta gradiente nullo solo nel punto $(0, 0)$ e sotto questa condizione si ha che:

$$\text{Hess}f = \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4k^2 = 4(1 - k^2) \neq 0$$

e quindi si hanno i seguenti casi:

$$\begin{aligned}-1 < k < 1 &\Rightarrow \text{Hess}f > 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ punto di minimo} \\ k < -1, k > 1 &\Rightarrow \text{Hess}f < 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ punto di sella}\end{aligned}$$

Esercizio 2

Il problema si riconduce a trovare il minimo assoluto della funzione:

$$E(m, q) = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2$$

e, poichè la funzione è polinomiale e differenziabile in tutto il suo dominio, il punto di minimo sarà un punto critico, quindi:

$$\begin{aligned}\nabla E_1 &= \frac{\partial}{\partial m} (E) = \frac{\partial}{\partial m} \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - q)^2 \\ &= -\sum_{i=1}^n 2x_i (y_i - mx_i - q) = -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2m \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2q \sum_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla E_2 &= \frac{\partial}{\partial q}(E) \\ &= - \sum_{i=1}^n 2(y_i - mx_i - q) = 2m \sum_{i=1}^n x_i + 2qn - 2 \sum_{i=1}^n y_i\end{aligned}$$

e ponendo le due componenti uguali a zero si ottengono le due equazioni cercate. Resta ancora da discutere se il punto critico trovato sia di massimo o minimo. I punti dati sono n e quindi in numero finito. La funzione $E(m, q)$ rappresenta la somma dei quadrati degli scarti fra le ordinate dei punti dati e dei punti della retta, quindi per $q \gg \max\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ (sotto questa condizione la retta è molto lontana dai punti) il valore assunto dalla funzione tende ad infinito. Analoghe considerazioni possono essere fornite per il coefficiente angolare della retta (prendendo le ascisse dei punti dati e facendo tendere ad infinito il coefficiente angolare della retta, le rispettive ordinate calcolate sulla retta tendono ad infinito perchè $m \rightarrow \infty \Rightarrow |mx_i + q| \rightarrow \infty$) deducendo che:

$$\lim_{(m,q) \rightarrow \infty} E(m, q) = +\infty$$

(esiste una sola condizione per la quale $E(m, q) \not\rightarrow +\infty$ e coincide con il caso in cui la retta approssimante sia verticale, ma questa condizione è già esclusa dal testo del problema che vuole che si ricerchi una retta in forma esplicita e quindi non sarà mai possibile trovare la retta verticale). Quindi, essendo unico il punto critico esso non può essere altro che di minimo, quindi esiste la retta cercata e la sua unicità è data dall'esistenza di un solo punto critico (che poi è confermato dal fatto che il sistema sia lineare in due equazioni linearmente indipendenti e nelle incognite m e q).

Esercizio 3

1) La funzione è differenziabile ovunque nel suo dominio ($\text{dom } f = \mathbb{R}^2$)

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{2+x^2+y^2} - y, \frac{2y}{2+x^2+y^2} - x \right)$$

e si ha che:

$$\nabla f = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{2+x^2+y^2} = y \\ \frac{2y}{2+x^2+y^2} = x \end{cases}$$

sostituendo si ha:

$$y = \frac{4}{(2+x^2+y^2)^2} y \xrightarrow{y \neq 0} (2+x^2+y^2)^2 = 4$$

ma ciò è assurdo perchè per $y \neq 0$ la quantità $(2+x^2+y^2)^2 > 4$, quindi l'unico punto critico è $(0, 0)$.

$$\text{Hess } f(0, 0) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

quindi si ha che in prossimità dell'origine lo sviluppo polinomiale di Taylor della funzione è:

$$f(x, y) \stackrel{T}{=} f(0, 0) + \frac{1}{2}(x - y)^2$$

e si osserva che lungo tutte le direzioni tali per cui $y \neq x$ il differenziale secondo è sempre positivo tranne che nel punto $(0, 0)$ e quindi la funzione ammette nell'origine un punto di minimo (relativo a queste direzioni). Per $x = y$ allora il problema diventa studiare la funzione:

$$g(x) = \log(2 + 2x^2) - x^2$$

che ammette per $x = 0$ un punto di massimo, quindi lungo la direzione $y = x$ la funzione ha un massimo (relativo a quella direzione). Quindi riassumendo nel punto $(0, 0)$ la funzione $f(x, y)$ ha un punto di sella.

2)

$$\nabla f = (3y - 3x^2, 3x - 3y^2) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 1 \quad \vee \quad x = y = 0$$

e si ha:

$$\text{Hess}f = \begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{vmatrix}$$

e quindi

$$x = y = 0 \Rightarrow \text{Hess}f = -9 \Rightarrow \text{Punto di sella}$$

$$x = y = 1 \Rightarrow \text{Hess}f = 27 \quad \wedge \quad f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{Punto di massimo}$$

3)

$$\nabla f = (4x^3 - 2xy^2, 4y^3 - 2yx^2) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

ed essendo:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + y^4 - x^2y^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 + x^2y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

si deduce che essendo l'origine l'unico punto critico e la funzione sempre positiva e non nulla tranne che nell'origine (dove si annulla), allora l'origine è certamente un punto di minimo assoluto.

Esercizio 4

Innanzitutto esplicitando la componente z e sostituendola nell'espressione xy^2z si ottiene:

$$z = 8 - x - y \Rightarrow f(x, y) = xy^2z(x, y) = xy^2(8 - x - y)$$

e quindi il problema si riconduce al calcolo del massimo della funzione $f(x, y)$. Il problema innanzitutto è ben posto perchè, riscrivendo la funzione in coordinate polari, si ha (considerando che $x, y > 0 \Rightarrow 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$):

$$\varrho \rightarrow \infty \Rightarrow f = \varrho^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta (8 - \varrho \cos \vartheta - \varrho \sin \vartheta) \rightarrow -\infty$$

e quindi essendo la curva continua deve ammettere almeno un punto di massimo assoluto.

Quindi i punti critici sono:

$$\nabla f = (8y^2 - 2xy^2 - y^3, 16xy - 2x^2y - 3xy^2) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (2, 4)$$

e

$$\text{Hess}f = \begin{vmatrix} -2y^2 & -y(4x + 3y - 16) \\ -y(4x + 3y - 16) & -2x(x + 3y - 8) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -32 & -16 \\ -16 & -24 \end{vmatrix} > 0$$

ed essendo $f_{xx} = -32 < 0$ il punto $(x, y) = (2, 4)$ è un punto di massimo e poichè è unico punto critico (lungo la frontiera del dominio, cioè $x = 0 \vee y = 0$, la funzione è identicamente nulla ed ovviamente non possono essere punti di massimo) è necessariamente un punto di massimo assoluto. Quindi:

$$(x, y, z) = (2, 4, 2)$$

Esercizio 5

$$\nabla f = (y, x) = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0$$

e poichè per $x, y > 0$ (x e y concordi) $f(x, y) > 0$ e per $x, y < 0$ $f(x, y) < 0$ si deduce che nell'intorno di $(0, 0)$ la funzione cambia segno e l'origine non può essere un punto di massimo, ma solamente di sella. Quindi i massimi e minimi sono sulla frontiera del dominio che, trasformata in coordinate polari, è data da:

$$\partial \text{dom} f = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$$

e quindi si ha che il problema si riduce allo studio dei massimi e minimi della funzione (dove $\rho = 1$ poichè la frontiera è una circonferenza unitaria):

$$f(\vartheta) = \rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \sin(2\vartheta)$$

con $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ e si ottiene immediatamente che se:

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \Rightarrow \text{Punti di massimo} \quad (x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vartheta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi \Rightarrow \text{Punti di minimo} \quad (x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

3 Curve e superfici

Esercizio 1

La tangente alla curva nel punto $(1, 1)$ è data dallo sviluppo di Taylor arrestato al primo ordine, quindi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

la lunghezza della curva invece è data da:

$$L(\gamma) = \int_0^a \sqrt{1 + f'^2(x)} dx = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} x dx = \left[\frac{(9x + 4)^{3/2}}{27} \right]_0^a$$

Esercizio 2

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + f'^2(x)} &= \int \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\ &\stackrel{x=\log y}{=} \int \frac{\sqrt{1 + y^2}}{y} dy \\ &\stackrel{\sqrt{1+y^2}=t+y}{=} \int \frac{-(t^2 + 1)^2}{(1 - t^2)2t^2} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \log \left(\frac{t-1}{t+1} \right) + \frac{t}{2} + \frac{1}{2t} \\ &= \log \left(\sqrt{e^{2x} + 1} - 1 \right) + \sqrt{1 + e^{2x}} - x = F(x) \end{aligned}$$

dove nella seconda sostituzione:

$$\sqrt{1 + y^2} = t + y \Rightarrow y = \frac{1 - t^2}{2t} \Rightarrow dy = \frac{-t^2 - 1}{2t^2} dt$$

e quindi

$$L(\gamma) = [F(x)]_0^1$$

Esercizio 3

Riscrivendo la curva in coordinate cartesiane si ha:

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos(t)) \cos(t) \\ y = a(1 + \cos(t)) \sin(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2a \sin(t) \cos(t) - a \sin(t) \\ y' = 2a \cos^2(t) + a \cos(t) - a \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2a^2 (\cos(t) + 1)} dt \\ |\cos \frac{x}{2}| &\stackrel{=}{=} \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}} \quad 2|a| \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt \\ &= 4|a| \int_0^{\pi} \cos \frac{t}{2} dt = 4a \left[2 \sin \frac{t}{2} \right]_0^{\pi} = 8|a| \end{aligned}$$

per $t = \frac{\pi}{2}$ si ha che

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = a \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -a \\ y' = -a \end{cases}$$
$$y = y_0 + \frac{y'}{x'}(x - x_0) = a + x$$

Esercizio 4

$$\begin{cases} x' = a(1 - \cos(t)) \\ y' = a(\sin(t)) \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 (1 + \cos^2(t) - 2 \cos(t)) + a^2 \sin^2(t)} dt \\ &= |a| \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos(t)} dt \\ |\sin \frac{x}{2}| &\stackrel{=}{=} \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}} \quad 2|a| \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8|a| \end{aligned}$$

Esercizio 5

$$\nabla f(x, y) = (e^x(x+1) - y \cos(xy), -x \cos(xy) - 1) \Rightarrow \nabla f(0, 1) = (0, -1)$$

quindi la retta tangente è data da:

$$\nabla f \cdot (P - P_0) = 0 \Rightarrow (0, -1) \cdot (x, y - 1) = 0 \Rightarrow y = 1$$

Esercizio 6

Se valgono le ipotesi del teorema del Dini per $F(x, y)$ allora esiste una funzione $f(x)$ che esplicita la curva $F(x, y) = 0$ nell'intorno dei punti in cui le ipotesi del teorema sono verificate, cioè:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x, f(x)) = 0 \Rightarrow DF(x, y) = \nabla F \cdot \left(\frac{d}{dx}x, \frac{d}{dx}f(x) \right) \\ &= F_x + f'(x)F_y = 0 \Rightarrow f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} f'(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_x}{F_y} \right) \\ &= -\frac{F_{xx}F_y - F_{xy}F_x}{F_y^2} \end{aligned}$$

Esercizio 7

$$\nabla f = \left(\log(y) + y \sin(x), \frac{x}{y} - \cos(x) \right)$$

se (x, y) appartiene ad una opportuna palla B centrata in $(\frac{\pi}{2}, 1)$ si ha che per la seconda componente del gradiente:

$$(x, y) \in B_{(\pi/2, 1)} \Rightarrow \frac{x}{y} - \cos(x) \sim \frac{x}{y} \neq 0$$

e quindi sono verificate le ipotesi del teorema del Dini e la curva $f(x, y) = 0$ è esplicitabile attraverso una funzione $\varphi(x)$ la cui derivata prima è data da:

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{2}{\pi}$$

Utilizzando l'equazione dimostrata nell'esercizio precedente si ha che:

$$\varphi''(x) = -\frac{f_{xx}f_y - f_{xy}f_x}{(f_y)^2} = \frac{8}{\pi^2}$$

e quindi:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{4}{\pi^2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 + o \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2$$

Esercizio 8

La trasformazione è invertibile localmente quando le due variabili x e y sono esprimibili in funzione dei valori u e v , cioè quando esistono due funzioni φ e ξ tali che:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \xi(u, v) \end{cases}$$

L'esistenza locale di queste funzioni è assicurata dal teorema del Dini, quindi la trasformazione è invertibile quando lo Jacobiano associato alla trasformazione non è degenere, quando cioè:

$$J_T = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^2}{\partial x} & \frac{\partial(-y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(2xy)}{\partial x} & \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \neq y$$

Quindi il teorema del Dini assicura che la trasformazione è invertibile se x e y sono entrambi non nulli. L'unico punto a creare problemi è il punto $(x, y) = (0, 0)$ che è trasformato in $(u, v) = (0, 0)$, ma

$$u = 0 \stackrel{u=x^2-y^2}{\iff} x = \pm y \iff v = 2xy = \pm 2x^2 = 0 \iff x = y = 0$$

e quindi la trasformazione risulta invertibile per ogni (x, y) .

Esercizio 9

Effettuando un cambiamento di variabile in coordinate polari la circonferenza γ data si può scrivere come :

$$\gamma = (2 \cos \vartheta, 1 + 2 \sin \vartheta)$$

e quindi la funzione:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) = 1 + 2 \cos \vartheta + 2 \sin \vartheta \\ &= 1 + 2(\cos \vartheta + \sin \vartheta) \end{aligned}$$

e quindi adesso il problema si riconduce a studiare i massimi e i minimi della funzione $z(\vartheta)$ e si ha che:

$$\begin{aligned} \vartheta = \frac{\pi}{4} &\Rightarrow \max = (\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}) \\ \vartheta = \frac{5}{4}\pi &\Rightarrow \min = (-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Esercizio 10

1) Innanzitutto $f(1, 0) = 0$ e quindi il punto $(1, 0, 0) \in \text{Im}f$, quindi:

$$\nabla f(x, y) = (2x, -2y) \Rightarrow \nabla f(1, 0) = (2, 0)$$

e quindi:

$$z = \nabla f \cdot (P - P_0) = 2(x - 1)$$

2) Innanzitutto $f(1, 0, 0) = 0$ e quindi il punto $(1, 0, 0) \in \text{Im}f$, quindi:

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 8y, 18z) = (2, 0, 0)$$

ed il piano tangente è dato da:

$$\nabla f \cdot (P - P_0) = 0 \Rightarrow (2, 0, 0) \cdot (x - 1, y, z) = 0 \Rightarrow x = 1$$

3) Innanzitutto $f(0, 0) = (1, 0, 0)$ e quindi il punto $(1, 0, 0) \in \text{Im}f$,

$$D_u = \begin{cases} -\sin(u+v) \\ \cos(u-v) \\ 2u \end{cases} \quad D_v = \begin{cases} -\sin(u+v) \\ -\cos(u-v) \\ 2v \end{cases}$$

e valutati per $(u, v) = (0, 0)$ si ottengono i vettori $(0, 1, 0)$ e $(0, -1, 0)$ che sono due vettori paralleli e quindi non sono indipendenti e di conseguenza nel punto $(1, 0, 0)$ non esiste il piano tangente.

4 Successioni e serie di funzioni

Esercizio 1

1)

$$\forall x \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow n \sin \frac{x}{n} \sim x$$

e quindi la successione converge puntualmente a $f_\infty(x) = x$. La successione converge uniformemente se e solo se

$$\sup |f_n(x) - f_\infty(x)| \rightarrow 0$$

e quindi si tratta di studiare l'estremo superiore della funzione:

$$g(x) = n \sin \frac{x}{n} - x$$

che ha come punti critici $x = 2nk\pi$ e

$$\begin{aligned} g(2nk\pi) &= -2nk\pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \Rightarrow \\ \sup |f_n - f_\infty(x)| &\rightarrow +\infty \Rightarrow \\ &\text{Non converge uniformemente} \end{aligned}$$

2) La successione ammette limite puntuale solo per x positivi, quindi:

$$\forall x \geq 0 \quad n \rightarrow \infty \Rightarrow f_n(x) = nx^2 e^{-nx} \rightarrow 0$$

mentre per x negativi il termine generico tende ad infinito. Affinchè la successione converga uniformemente bisogna mostrare che il sup della differenza $|f_n - f_\infty| = f_n$ tende ad annullarsi, infatti i punti critici sono dati da:

$$f'_n(x) = 2nxe^{-nx} - n^2x^2e^{-nx} = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{n}$$

e si ha che:

$$f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n} e^{-2} \rightarrow 0$$

e quindi la successione converge uniformemente.

3) Il limite puntuale è:

$$\forall x \quad \frac{nx^2}{n^2 + x} \rightarrow 0 = f_\infty$$

e si ha che $|f_n - f_\infty| = |f_n|$. I punti critici della funzione f_n sono dati da:

$$f'_n = \frac{2nx(n^2 + x) - nx^2}{(n^2 + x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2n^2 \Rightarrow f_n(-2n^2) = -4n^3 \rightarrow -\infty$$

Quindi i massimi della funzione non convergono a 0 e la successione non può convergere uniformemente.

4) Affinchè la successione converga la base dell'esponenziale deve essere compresa in $(-1, 1]$, ed essendo $x^2 + x \geq -\frac{1}{4}$ (perchè $y = x^2 + x$ è una parabola convessa che ha vertice in $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$), bisogna imporre che $x^2 + x \leq 1$. Quindi la funzione converge puntualmente solo nell'intervallo $(\phi_1, \phi_2]$ dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le radici dell'equazione: $x^2 + x = 1$. La funzione limite è data da:

$$f_\infty = \begin{cases} 1 & x = \phi_2 \\ 0 & x \in (\phi_1, \phi_2) \end{cases}$$

Innanzitutto la convergenza non è uniforme nell'intorno sinistro di ϕ_2 poichè la funzione limite è discontinua e la funzione generica è continua e la convergenza uniforme conserva la continuità. Studiando, procedendo come negli esercizi precedenti, i massimi della funzione $|f_n - f_\infty| = |f_n|$ si ha che:

$$f'_n(x) = (x^2 + x)^{n-1} (2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \rightarrow 0 \\ \vee x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

e quindi la funzione converge uniformemente in qualsiasi intervallo $[a, b] \subseteq (\phi_1, \phi_2)$.

Esercizio 2

Fissato $x \geq 0$ si ha che:

$$a_n = \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

inoltre preso $1 + \frac{x}{n} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow n > \frac{2x}{\pi-2}$ si ha che all'aumentare di n la quantità $1 + \frac{x}{n}$ diminuisce ed essendo inferiore a $\pi/2$ il suo seno decresce e quindi

$$\frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}} > \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)}{\sqrt{n+1}}$$

poichè il numeratore del secondo membro è minore di quello del primo ed il denominatore è maggiore. e per $n > \frac{2x}{\pi-2}$ si ha anche che $a_n > 0$. Quindi applicando il Criterio di Leibniz si ottiene la convergenza della serie.

Preso $x < 0$ si ha sempre che $a_n \rightarrow 0$ e preso $n > \lceil |x| \rceil$ si ha che $-1 < x/n < 0$ e quindi

$$\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right) > 0$$

Per applicare il Criterio di Leibniz resta da dimostrare che il termine a_n è decrescente e ciò equivale a dimostrare che la funzione:

$$\varphi(n) = \frac{\sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$$

è monotona, cioè

$$\begin{aligned}\frac{d}{dn}\varphi(n) &= \frac{-\frac{x}{n^{3/2}}\cos\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2\sqrt{n}}\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n} < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tan\left(1+\frac{x}{n}\right) > \frac{-2x}{n}\end{aligned}$$

e posto ξ soluzione dell'equazione

$$\tan(1+t) = -2t \quad \text{con } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

si ha che:

$$-1 < t < \xi < 0$$

e:

$$\tan(1+t) > -2t \Leftrightarrow t > \xi \stackrel{t=\frac{x}{n}}{\Rightarrow} \frac{x}{n} > \xi \Rightarrow n > \frac{x}{\xi}$$

e quindi la funzione $\varphi(n)$ è definitivamente monotona e quindi anche il termine a_n è decrescente e la serie converge puntualmente per il criterio di Leibniz. Quindi la serie converge puntualmente in tutto \mathbb{R} .

Studiando la convergenza totale si ha che:

$$\begin{aligned}\sum \sup |f_n(x)| &= \sum \sup \left| \frac{\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}} \right| \\ &= \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty\end{aligned}$$

poichè la funzione generica f_n ha un punto di massimo quando il numeratore è massimo (fissato n , il denominatore è costante) e il valore massimo assunto dal numeratore è 1, allora la funzione non converge totalmente in tutto \mathbb{R} .

Esercizio 3

applicando il criterio di Hadamard

a)

$$\sqrt[n]{n^2} \rightarrow 1 \Rightarrow R = 1$$

b)

$$\sqrt[n]{|na^n|} \rightarrow |a| \Rightarrow R = \frac{1}{|a|} \quad \text{se } a \neq 0 \quad \vee \quad \infty \quad \text{se } a = 0$$

c)

$$\sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n!}} \sim \sqrt[n]{\frac{|a|^n}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}} = \frac{|a|e}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{2\pi n}} \rightarrow 0 \Rightarrow R = \infty$$

d)

$$\sqrt[n]{\frac{n}{n^3+1}} = 1 \Rightarrow R = 1$$

e)

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{(n+1)!(n+3)!}{(2n)!}} &\sim \sqrt[n]{\frac{(n+1)^2(n+2)(n+3)\sqrt{\pi n}}{2^{2n}}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt[n]{(n+1)^2(n+2)(n+3)} \sqrt[2n]{\pi n} = \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4 \end{aligned}$$

Esercizio 4

Le funzioni date possono essere espresse come serie di potenze attraverso lo sviluppo in serie di Taylor sotto la condizione che il resto secondo Lagrange tenda a zero.

a)

$$e^x \stackrel{T}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

da cui

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

ed il resto secondo Lagrange è dato da:

$$R_L = \frac{(-1)^n c^{2n}}{n!} \rightarrow 0 \Leftrightarrow -1 \leq c \leq 1$$

quindi, poiché il resto secondo Lagrange tende a 0 al crescere di n , la funzione è analitica e può essere scritta come sviluppo in serie di Taylor.

b) Dalla formula del binomio si ha che:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$

che converge per ogni $|x| < 1$ (il resto di Lagrange è infinitesimo per $n \rightarrow \infty$), quindi per $|x| < 1 \Rightarrow x^2 < 1$ si ha che:

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$$

c) Dato che

$$\forall x \Rightarrow \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

e quindi:

$$\sin(2x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{2}x)^{4n+2}$$

Esercizio 5

Innanzitutto la funzione è dispari e quindi i coefficienti a_n del coseno sono tutti nulli.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[[\cos(nx)]_{-\pi}^0 - [\cos(nx)]_0^{\pi} \right] = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ dispari} \end{cases} \end{aligned}$$

ed ovviamente il valore medio della funzione nel suo periodo è nullo e quindi $a_0/2 = 0$ ottenendo lo sviluppo in serie di Fourier di $f(x)$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{4}{\pi n} \sin(nx)$$

Esercizio 6

a) La funzione è pari e quindi $b_n = 0$, mentre

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin(x)| \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(x) \cos(nx) dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} (2F(\pi) - F(0) - F(2\pi)) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \sin(x) \cos(nx) dx \\ &\stackrel{P}{=} \sin(x) \frac{\sin(nx)}{n} - \int \cos(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &\stackrel{P}{=} \sin(x) \frac{\sin(nx)}{n} - \left[\cos(x) \frac{-\cos(nx)}{n^2} \right] + \int \sin(x) \frac{\cos(nx)}{n^2} dx \end{aligned}$$

e uguagliando direttamente il secondo membro della prima riga con l'ultimo si ha:

$$F(x) = \int \sin(x) \cos(nx) dx = \frac{n \sin(x) \sin(nx) + \cos(x) \cos(nx)}{n^2 - 1}$$

e quindi:

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4}{(n^2-1)\pi} & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

e la serie di Fourier è data da:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ pari}} \frac{-4 \cos(nx)}{\pi n^2 - 1} \\ &= \frac{2}{\pi} + \sum_{n \text{ pari}} \frac{-4 \cos(nx)}{\pi n^2 - 1}\end{aligned}$$

b) Utilizzando la formula trigonometrica riguardante il seno della somma di due angoli si ha:

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha) \cos(\alpha) + \cos(2\alpha) \sin(\alpha) \\ &= 3 \sin(\alpha) \cos^2(\alpha) - \sin^3(\alpha) \\ &= 3 \sin(\alpha) - 4 \sin^3(\alpha)\end{aligned}$$

da cui:

$$\sin^3(x) = \frac{3 \sin(x) - \sin(3x)}{4}$$

c) Dalla trigonometria è nota la formula di bisezione:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

da cui:

$$\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$$

5 Equazioni differenziali

Esercizio 1

a)

$$y' = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) \Rightarrow \frac{y}{y+1}y' = x$$

e quindi:

$$\frac{y}{y+1}y' = y' - \frac{1}{y+1}y' = x$$

e primitivando entrambi i membri si ha che:

$$y(x) - \log(y(x) + 1) = \frac{x^2}{2} + c$$

b) Moltiplicando entrambi i membri per μ l'equazione diventa:

$$\mu y' + 2\mu xy = 2\mu x e^{-x^2}$$

e imponendo che $\mu' = 2\mu x$ si ha che:

$$\frac{\mu'}{\mu} = 2x \Rightarrow \mu = e^{x^2}$$

e tornando all'equazione si ha:

$$(\mu y)' = 2x \Rightarrow y e^{x^2} = x^2 + c \Rightarrow y = \frac{x^2 + c}{e^{x^2}}$$

c) Separando i termini dipendenti dalla y dagli altri si ha:

$$y' - \sin(x)y = \sin(x) \cos(x)$$

e procedendo come nell'esercizio precedente:

$$\mu y' - \mu \sin(x)y = \mu \sin(x) \cos(x)$$

ed imponendo:

$$\mu' = -\mu \sin(x) \Rightarrow \mu = e^{\cos(x)}$$

quindi:

$$\begin{aligned} y e^{\cos(x)} &= \int e^{\cos(x)} \sin(x) \cos(x) dx \\ &= e^{\cos(x)} (1 - \cos(x)) + c \end{aligned}$$

da cui si ha:

$$y = (1 - \cos(x)) + c e^{-\cos(x)}$$

d)

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2$$

e procedendo come al solito:

$$\mu y' - \mu \frac{2}{x} y = \mu x^2$$

con

$$\mu' = -\mu \frac{2}{x} \Rightarrow \mu = e^{-2 \log(x)} = x^{-2}$$

quindi:

$$(\mu y)' = (x^{-2} y)' = 1 \Rightarrow x^{-2} y = x + c \Rightarrow y = x^3 + cx$$

Esercizio 2

L'assenza dell'unicità della soluzione è ovvia se si trovano due soluzioni del problema di Cauchy, è immediato verificare che le seguenti funzioni sono soluzioni:

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ y &= \cos(-x) \end{aligned}$$

Esercizio 3

1) L'equazione differenziale del problema di Cauchy può essere espressa come:

$$y' = f(x, y)$$

con $f(x, y) = \sin(y^2)$ e poichè:

$$\forall y_1, y_2 \quad |\sin(y_1^2) - \sin(y_2^2)| \leq 2$$

si ha che $f(x, y)$ è globalmente lipschitziana in y e quindi il problema di Cauchy ammette una e una soluzione definita in tutto \mathbb{R} .

2) ponendo

$$f(x, y) = \frac{e^y}{y^2 + 1}$$

si ha che il problema di Cauchy può essere scritto come: $y' = f(x, y)$.
Essendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{e^y (y + 1)^2}{(y^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Quindi essendo le derivate parziali continue e non limitate la funzione è localmente lipschitziana e quindi il problema di Cauchy ammette soluzione locale.

Esercizio 4

1) l'equazione associata è:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = -5, \lambda = 2$$

e quindi la soluzione generale è data da:

$$y_{gen} = Ae^{-5x} + Be^{2x}$$

2) l'equazione associata è:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

e la soluzione generale è data da:

$$y_{gen} = Ae^{\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} + Be^{\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)x}$$

e la soluzione reale è data da:

$$y_{gen,\mathbb{R}} = \frac{y_{gen} + \overline{y_{gen}}}{2} = Ae^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Be^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Esercizio 5

1) L'equazione algebrica associata è:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

da cui:

$$y_{hom} = Ae^{-ix} + Be^{ix}$$

e le soluzioni reali sono date da:

$$y_{hom,\mathbb{R}} = A \cos(x) + B \sin(x)$$

applicando il metodo di variazione delle costanti e cercando la soluzione particolare nell'insieme $y = A(x) \cos(x) + B(x) \sin(x)$ ottenendo quindi il sistema

$$\begin{cases} -A'(x) \sin(x) + B'(x) \cos(x) = \frac{1}{\cos(x)} \\ A'(x) \cos(x) + B'(x) \sin(x) = 0 \end{cases}$$

e risolvendo in $A'(x)$ e $B'(x)$ (per esempio con il metodo di Cramer) si ha:

$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{\cos(x)} & \cos(x) \\ 0 & \sin(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\sin(x) & \cos(x) \\ \cos(x) & \sin(x) \end{vmatrix}} = -\tan(x) \Rightarrow A(x) = \log |\cos(x)|$$
$$B'(x) = 1 \Rightarrow B(x) = x$$

e quindi:

$$y_{gen} = \log |\cos(x)| \cos(x) + x \sin(x) + A \cos(t) + B \sin(t)$$

2) L'equazione algebrica associata è data da:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -3, \lambda = 2$$

e quindi:

$$y_{hom} = Ae^{2t} + Be^{-3t}$$

e la soluzione particolare apparterrà alla famiglia $y = Ce^{4t}$ e sostituendo nell'equazione si ha che:

$$y'' + y' - 6y = 1 \Rightarrow 14C = 1$$

e quindi la soluzione generale è:

$$y_{gen} = Ae^{2t} + Be^{-3t} + \frac{1}{14}e^{4t}$$

Esercizio 7

1) L'equazione algebrica associata è:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = -2$$

da cui:

$$y_{hom} = Ae^x + Be^{-2x}$$

e una soluzione particolare è

$$y_{part} = -\frac{1}{2}$$

da cui:

$$y_{gen} = -\frac{1}{2} + Ae^x + Be^{-2x}$$

2) L'equazione algebrica associata è:

$$\lambda^3 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \pm 1$$

da cui:

$$y_{hom} = A + Be^x + Ce^{-x}$$

Essendo:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{e^{2ix}}{4} + \frac{e^{-2ix}}{4}$$

l'equazione differenziale può essere riscritta come:

$$y''' - y' = \frac{1}{2} + \frac{e^{2ix}}{4} + \frac{e^{-2ix}}{4}$$

ed applicando il principio di sovrapposizione la ricerca della soluzione particolare si riduce alla ricerca delle soluzioni particolari di 3 equazioni differenziali.

$$y''' - y' = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{part,1} = -\frac{1}{2}x$$

$$y''' - y' = \frac{e^{2ix}}{4}$$

le cui soluzioni particolari sono da ricercare nella famiglia $y = Ce^{2ix}$ e quindi:

$$\begin{aligned} y''' - y' &= -2Ci - 8Ci \\ &= \frac{1}{4} \Rightarrow C = \frac{i}{40} \Rightarrow y_{part,2} = \frac{i}{40}e^{2ix} \end{aligned}$$

e la soluzione particolare dell'equazione:

$$y''' - y' = \frac{e^{-2ix}}{4}$$

è la coniugata complessa della precedente avendo quindi: $y_{part,3} = \overline{y_{part,2}}$ e sommando tutte le soluzioni particolari si ha che:

$$\begin{aligned} y_{part} &= y_{part,1} + y_{part,2} + y_{part,3} \\ &= -\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{20} \end{aligned}$$

3) L'equazione algebrica associata è:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

e la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata è data da:

$$y_{hom} = Ae^{ix} + Be^{-ix}$$

Sfruttando le formule di Eulero dell'esponenziale complesso l'equazione differenziale può essere riscritta come:

$$y'' + y = 1 + \frac{xe^{ix}}{2i} - \frac{xe^{-ix}}{2i}$$

e quindi, applicando il principio di sovrapposizione, si ottiene:

$$y'' + y = 1 \Rightarrow y_{part,1} = 1$$

$$y'' + y = +\frac{xe^{ix}}{2i}$$

le cui soluzioni particolari sono da ricercare nella famiglia $y = x(Ax + B)e^{ix}$ e sostituendo si ha:

$$\frac{d^2}{dx^2} (x(Ax + B)e^{ix}) + (x(Ax + B)e^{ix}) = +\frac{xe^{ix}}{2i} \Rightarrow A = -\frac{1}{8} \quad B = -\frac{i}{8}$$

e quindi:

$$y_{part,2} = x \left(-\frac{1}{8}x - \frac{i}{8} \right) e^{ix}$$

e la $y_{part,3} = \overline{y_{part,2}}$ poichè i termini non dipendenti da y sono gli uni i coniugati complessi degli altri, e quindi anche le soluzioni particolari sono una le coniugate complesse delle altre. Sovrapponendo le soluzioni particolari si ottiene la soluzione particolare dell'equazione iniziale:

$$y_{part} = 1 + x \left[-\frac{1}{4}x \cos(x) - \frac{\sin(x)}{4} \right]$$